ĐAI HỌC QUỐC GIA TP.HCM
TRƯỜNG PHỔ THÔNG NĂNG KHIẾU

ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 NĂM 2016-2017
MÔN THI: TOÁN (Chuyên)
Thời gian: 150 phút

Bài 1: (2,5 điểm)

a)Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(x-2y)(x+my)=m^2-2m-3\\(y-2x)(y+mx)=m^2-2m-3\end{cases}$ Khi m = -3 và tìm m để hệ có ít nhất một nghiệm $(x_0;y_0)$ thỏa $x_0>0;y_0>0$

b)Tìm $a\ge 1$ để phương trình $ax^2+(1-2a)x+1-a=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thỏa $x_2{}^2-ax_1=a^2-a-1$

Bài 2: (2 điểm) Cho x, y là hai số nguyên dương mà x^2+y^2+10 chia hết cho xy

a) Chứng minh: x, y là hai số lẻ và nguyên tố cùng nhau.

b) Chứng minh: $k=\dfrac{x^2+y^2+10}{xy}$ chia hết cho 4 và $k\ge 12$

Bài 3: (1,5 điểm) Biết $x\ge y\ge z,\ x+y+z=0$ và $x^2+y^2+z^2=6$

a)Tính $S=(x-y)^2+(x-y)(y-z)+(y-z)^2$

b)Tìm giá trị lớn nhất của $P=\left|(x-y)(y-z)(z-x)\right|$

Bài 4: (3 điểm) Tam giác ABC nhọn có $BAC>45^0$. Dựng các hình vuông ABMN, ACPQ (M và C khác phía đối với AB, B và Q khác phía đối với AC) AQ cắt đoạn BM tại E và NA cắt đoạn CP tại F.

a)Chứng minh: $\Delta ABE \backsim \Delta ACF$ và tứ giác EFQN là tứ giác nội tiếp.

b)Chứng minh: trung điểm I của EF là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

c)MN cắt PQ tại D, các đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại B và C cắt nhau tại J. Chứng minh: các điểm D; A; K; J thẳng hàng.

Bài 5: (1 điểm) Với mỗi số nguyên dương m lớn hơn 1, kí hiệu s(m) là ước nguyên dương lớn nhất của m và khác m. Cho số tự nhiên n > 1, đặt $n_0=n$ và lần lượt tính các số

$n_1=n_0-s(n_0), n_2=n_1-s(n_1),\dots,n_{i+1}=n_i-s(n_i),\dots,$ Chứng minh tồn tại số nguyên dương k để $n_k=1$ và tính k khi $n=2^{16}.14^{17}$

HẾT

ĐAI HỌC QUỐC GIA TP.HCM
TRƯỜNG PHỔ THÔNG NĂNG KHIẾU

ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 NĂM 2016-2017
MÔN THI: TOÁN (Chuyên)
Thời gian: 150 phút

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1: (2,5 điểm)

a)Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(x-2y)(x+my)=m^2-2m-3\\(y-2x)(y+mx)=m^2-2m-3\end{cases}$ Khi m = -3 và tìm m để hệ có ít nhất một nghiệm $(x_0;y_0)$ thỏa $x_0>0;y_0>0$

Với m = -3 thì hệ phương trình đã cho trở thành:

$$\begin{cases}(x-2y)(x-3y)=12\\(y-2x)(y-3x)=12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-2y)(x-3y)=(y-2x)(y-3x)\\(y-2x)(y-3x)=12\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-3xy-2xy+6y^2=y^2-3xy-2xy+6x^2\\(y-2x)(y-3x)=12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5x^2-5y^2=0\\(y-2x)(y-3x)=12\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x-y)(x+y)=0\\(y-2x)(y-3x)=12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x-y=0\\x+y=0\end{array}\right.\\(y-2x)(y-3x)=12\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y=x\\(y-2x)(y-3x)=12\end{cases}\quad(\mathrm{I})\\\begin{cases}y=-x\\(y-2x)(y-3x)=12\end{cases}\quad(\mathrm{II})\end{array}\right.$$

Giải hệ (I) $\begin{cases}y=x\\(y-2x)(y-3x)=12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=x\\(x-2x)(x-3x)=12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=x\\x^2=6\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=-\sqrt6\\y=-\sqrt6\end{cases}\\\begin{cases}x=\sqrt6\\y=\sqrt6\end{cases}\end{array}\right.$

Giải hệ (II) $\begin{cases}y=-x\\(y-2x)(y-3x)=12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-x\\(-x-2x)(-x-3x)=12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-x\\x^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=-1\\y=1\end{cases}\\\begin{cases}x=1\\y=-1\end{cases}\end{array}\right.$

Vậy khi m = -3, thì hệ phương trình có 4 nghiệm:

$$\begin{cases}x=-\sqrt6\\y=-\sqrt6\end{cases};\begin{cases}x=\sqrt6\\y=\sqrt6\end{cases};\begin{cases}x=-1\\y=1\end{cases};\begin{cases}x=1\\y=-1\end{cases}$$

Do $(x_0;y_0)$ là nghiệm của hệ phương trình nên ta có:

$$\begin{cases}(x_0-2y_0)(x_0+my_0)=m^2-2m-3\\(y_0-2x_0)(y_0+mx_0)=m^2-2m-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x_0-2y_0)(x_0+my_0)=(y_0-2x_0)(y_0+mx_0)\\(y_0-2x_0)(y_0+mx_0)=m^2-2m-3\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_0^2+mx_0y_0-2x_0y_0-2my_0^2=y_0^2+mx_0y_0-2x_0y_0-2mx_0^2\\(y_0-2x_0)(y_0+mx_0)=m^2-2m-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(2m+1)(x_0^2-y_0^2)=0\\(y_0-2x_0)(y_0+mx_0)=m^2-2m-3\end{cases}\quad(\text{I})$$

Xét $m=-\frac{1}{2}$, hệ phương trình (I) trở thành:

$$\begin{cases}(0)(x_0^2-y_0^2)=0\ (\text{luôn đúng})\\(y_0-2x_0)\left(y_0-\frac{1}{2}x_0\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)^2-2\left(-\frac{1}{2}\right)-3\end{cases}\Leftrightarrow y_0^2-\frac{1}{2}x_0y_0-2x_0y_0+y_0^2+\frac{7}{4}=0$$

$\Leftrightarrow y_0^2-\frac{5}{2}x_0y_0+x_0^2+\frac{7}{4}=0$, **có nghiệm** $\left(\frac{5+\sqrt{2}}{2};2\right)$, **thỏa đề bài nên nhận** $m=-\frac{1}{2}$

Xét $m\neq-\frac{1}{2}$, hệ phương trình (I) trở thành:

$$\begin{cases}(x_0^2-y_0^2)=0\\(y_0-2x_0)(y_0+mx_0)=m^2-2m-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x_0-y_0)(x_0+y_0)=0\\(y_0-2x_0)(y_0+mx_0)=m^2-2m-3\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x_0-y_0)=0\ (\text{do } x_0>0, y_0>0)\\(y_0-2x_0)(y_0+mx_0)=m^2-2m-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y_0=x_0\\(x_0-2x_0)(x_0+mx_0)=m^2-2m-3\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y_0=x_0\\-(1+m)x_0^2=m^2-2m-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y_0=x_0\\-(1+m)x_0^2=(m+1)(m-3)\end{cases}\ (\text{III})$$

Nếu m = -1, thì hệ (III) trở thành $\begin{cases}y_0=x_0\\-(0)x_0^2=0\end{cases}$, hệ này có vô số nghiệm thỏa đề bài nên nhận m = -1

Nếu $m\neq-1$, thì hệ (III) trở thành $\begin{cases}y_0=x_0\\-x_0^2=(m-3)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y_0=x_0\\x_0^2=3-m\end{cases}$, hệ này có nghiệm $x_0>0; y_0>0$ khi $3-m>0\Leftrightarrow m<3$.

Vậy m < 3 thì hệ phương trình đã cho có ít nhất một nghiệm $(x_0;y_0)$ thỏa $x_0>0; y_0>0$

b)Tìm $a\geq1$ để phương trình $ax^2+(1-2a)x+1-a=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thỏa $x_2^2-ax_1=a^2-a-1$

$ax^2+(1-2a)x+1-a=0$

có $\Delta=(1-2a)^2-4a(1-a)=1-4a+4a^2-4a+4a^2=8a^2-8a+1=8a(a-1)+1>0$ **với** $a\geq1$

Do đó phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với $a\geq1$.

Vì x_2 là nghiệm của phương trình $ax^2+(1-2a)x+1-a=0$ nên ta có:

$ax_2^2+(1-2a)x_2+1-a=0\Leftrightarrow ax_2^2=-(1-2a)x_2-1+a$

Theo định lí Vi-ét, ta có: $x_1+x_2=\frac{2a-1}{a}\Leftrightarrow x_1=\frac{2a-1}{a}-x_2$

Thay vào phương trình $x_2^2-ax_1=a^2-a-1$, ta được:

$$x_2^2-a\left(\frac{2a-1}{a}-x_2\right)=a^2-a-1\Leftrightarrow x_2^2+ax_2-2a+1=a^2-a-1\Leftrightarrow x_2^2+ax_2=a^2+a-2$$

$\Leftrightarrow ax_2^2+a^2x_2=a^3+a^2-2a$

Mà $ax_2^2 = -(1-2a)x_2 - 1 + a$ nên

$-(1-2a)x_2 - 1 + a + a^2x_2 = a^3 + a^2 - 2a \Leftrightarrow (a^2+2a-1)x_2 = a^3 + a^2 - 3a + 1$

$\Leftrightarrow (a^2+2a-1)x_2 = a^3 - a^2 + 2a^2 - 2a - a + 1 \Leftrightarrow (a^2+2a-1)x_2 = a^2(a-1) + 2a(a-1) - (a-1)$

$\Leftrightarrow (a^2+2a-1)x_2 = (a-1)(a^2+2a-1)$

$\Leftrightarrow x_2 = a-1\left(\text{vì } a \ge 1 \text{ nên } a^2+2a-1>0\right)$

Thế vào phương trình $ax^2 + (1-2a)x + 1 - a = 0$, ta được:

$a(a-1)^2 + (1-2a)(a-1) + 1 - a = 0 \Leftrightarrow (a-1)\left[a(a-1) + 1 - 2a - 1\right] = 0$

$$\Leftrightarrow (a-1)(a^2-3a) = 0 \Leftrightarrow a(a-1)(a-3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0\ \ (\text{loại}) \\ a = 1\ \ (\text{nhận}) \\ a = 3\ \ (\text{nhận}) \end{array}\right.$$

Vậy a =1 hay a = 3

Bài 2: (2 điểm) Cho x, y là hai số nguyên dương mà $x^2 + y^2 + 10$ chia hết cho xy

a)Chứng minh: x, y là hai số lẻ và nguyên tố cùng nhau.

Giả sử trong hai số x, y có một số chẵn, vì vai trò x, y như nhau nên không mất tính tổng quát ta giả sử x chẵn.

Ta có: $\begin{cases} x^2 + y^2 + 10 \vdots xy \\ x \text{ chẵn} \end{cases} \Rightarrow y \text{ chẵn}$

Khi đó: $(x^2 + y^2 + 10) \vdots 4$ mà $x^2 \vdots 4; y \vdots 4(\text{do x, y chẵn})$ nên $10 \vdots 4$ (vô lí).

Vậy x, y là hai số lẻ.

Đặt $d = (x,y)$, $x = dx', y = dy'$. Ta có: $x^2 + y^2 + 10 = d^2\left(x'^2 + y'^2\right) + 10$ chia hết cho d^2xy.

Suy ra 10 chia hết cho $d^2 \Rightarrow d = 1$. Vậy x, y nguyên tố cùng nhau.

b)Chứng minh: $k = \dfrac{x^2 + y^2 + 10}{xy}$ chia hết cho 4 và $k \ge 12$

Đặt $x = 2m+1, y = 2n+1$ (với $m,n \in N$).

Do đó: $k = \dfrac{(2m+1)^2 + (2n+1)^2 + 10}{(2m+1)(2n+1)} = \dfrac{4(m^2 + m + n^2 + n + 3)}{(2m+1)(2n+1)}$

Ta có: 4 và $(2m+1)(2n+1)$ nguyên tố cùng nhau $\Rightarrow (m^2 + m + n^2 + n + 3) \vdots (2m+1).(2n+1)$. Do đó: $k \vdots 4$

Ta chứng minh $k \ge 12$ bằng hai cách:

Ta có : $x^2 + y^2 + 10 = kxy$

Nếu trong hai số x, y có một số chia hết cho 3, giả sử x chia hết cho 3. Ta có $y^2 + 10$ chia hết cho 3, điều này vô lí vì y^2 chia 3 dư 0 hoặc dư 1.

Vậy x, y không chia hết cho 3, suy ra $x^2 + y^2 + 10$ chia hết cho 3 mà k, xy nguyên tố cùng nhau nên k chia hết cho 3. Do đó k chia hết cho 12. Vậy $k \ge 12$.

Bài 3: (1,5 điểm) Biết $x \ge y \ge z, x + y + z = 0$ và $x^2 + y^2 + z^2 = 6$

a)Tính $S = (x-y)^2 + (x-y)(y-z) + (y-z)^2$

Ta có:

$\left(x+y+z\right)^2 = x^2+y^2+z^2+2\left(xy+yz+zx\right) \Leftrightarrow xy+yz+zx=\frac{1}{2}\left[\left(x+y+z\right)^2-\left(x^2+y^2+z^2\right)\right]$

$\Leftrightarrow xy+yz+zx=\frac{1}{2}\left[\left(0\right)^2-\left(6\right)\right] \Leftrightarrow xy+yz+zx=-3$

Ta có: $S=\left(x-y\right)^2+\left(x-y\right)\left(y-z\right)+\left(y-z\right)^2$

$\Leftrightarrow S=x^2-2xy+y^2+xy-xz-y^2+yz+y^2-2yz+z^2$

$\Leftrightarrow S=x^2+y^2+z^2-\left(xy+yz+zx\right)$

$\Leftrightarrow S=6-\left(-3\right)=9$

b)Tìm giá trị lớn nhất của $P=\left|\left(x-y\right)\left(y-z\right)\left(z-x\right)\right|$

Ta có: $\left(a-b\right)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2+ab+b^2 \geq 3ab \Leftrightarrow ab \leq \frac{1}{3}\left(a^2+ab+b^2\right)$

Áp dụng bất đẳng thức trên, ta có:

$\left(x-y\right)\left(y-z\right) \leq \frac{1}{3}\left[\left(x-y\right)^2+\left(x-y\right)\left(y-z\right)+\left(y-z\right)^2\right]$

$\Leftrightarrow \left(x-y\right)\left(y-z\right) \leq \frac{1}{3}\left(9\right)=3$.

Do đó: $P \leq 3\left|x-z\right|$.

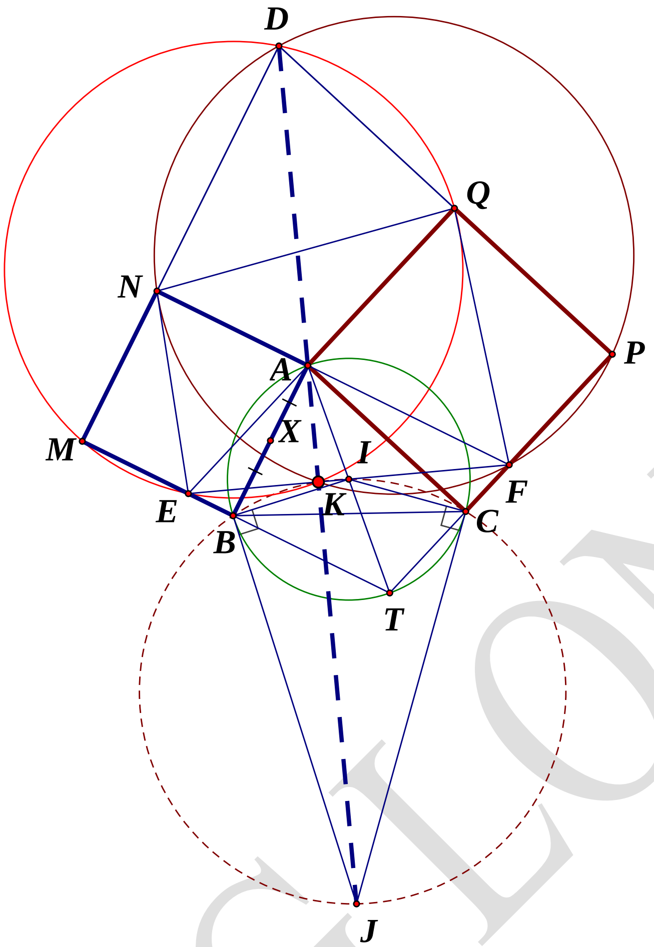
mà $\left|x-z\right| \leq \sqrt{2\left(x^2+z^2\right)} \leq \sqrt{2\left(x^2+y^2+z^2\right)}=\sqrt{2.\left(6\right)}=2\sqrt{3}$

nên $P \leq 6\sqrt{3}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là $6\sqrt{3}$.

Dấu ‘’=’’ xảy ra khi $\begin{cases} x \geq y \geq z \\ x+y+z=0 \\ x^2+y^2+z^2=6 \\ x=-z \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\sqrt{3} \\ y=0 \\ z=-\sqrt{3} \end{cases}$

<u>Bài 4:</u> (3 điểm) Tam giác ABC nhọn có $BAC > 45^0$. Dựng các hình vuông ABMN, ACPQ (M và C khác phía đối với AB, B và Q khác phía đối với AC) AQ cắt đoạn BM tại E và NA cắt đoạn CP tại F.



a)Chứng minh: $\Delta ABE \backsim \Delta ACF$ và tứ giác EFQN là tứ giác nội tiếp.

Ta có: $\begin{cases} \mathbf{EAB + BAC = 90^0} \\ \mathbf{FAC + BAC = 90^0} \end{cases} \Rightarrow \mathbf{EAB = FAC}$. Mà $\mathbf{ABE = ACF\left(=90^0\right)}$.

Nên $\Delta ABE \backsim \Delta ACF(g-g) \Rightarrow ... \Rightarrow AE.AC = AF.AB$

Mặt khác: $AC = AQ.AB = AN \;\; \Rightarrow AE.AQ = AN.AF$

$\Rightarrow ... \Rightarrow$ Tứ giác QNEF nội tiếp.

b)Chứng minh: trung điểm I của EF là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Cách 1: Gọi T là giao điểm của MB và CP.

Ta có:

$\begin{cases} \mathbf{AF // ET} \\ \mathbf{AE // FT} \end{cases} \Rightarrow$ Tứ giác AETF là hình bình hành.

$\Rightarrow$ Trung điểm EF cũng là trung điểm AT.

Mà tứ giác ABTC nội tiếp và AT là đường kính của đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Nên trung điểm I của EF là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Cách 2: Gọi X là trung điểm của AB.

Hình thang AEBF có IX là đường trung bình $\Rightarrow$ IX // BE $\Rightarrow \mathbf{IX \perp AB}$

$\Rightarrow$ IX là đường trung trực của đoạn AB. (1)

Chứng minh tương tự , ta được: I cũng thuộc đường trung trực của đoạn AC. (2)

Từ (1) và (2) suy ra: I là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC

c)MN cắt PQ tại D, các đường tròn ngoại tiếp tam giác DMQ và DNP cắt nhau tại K, tiếp tuyến tại B và C của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cắt nhau tại J. Chứng minh: các điểm D; A; K; J thẳng hàng.

Gọi K’ là giao điểm của DA và EF.

Ta có:

$$\begin{cases} \mathbf{NFK'} = \mathbf{NQA}\left(\textbf{Tứ giác NQFE nội tiếp}\right) \\ \mathbf{NQA} = \mathbf{NDA}\left(\textbf{Tứ giác AQDN nội tiếp}\right) \end{cases} \Rightarrow \mathbf{NDA} = \mathbf{AFK'} \Rightarrow \text{Tứ giác NDFK' nội tiếp.}$$

Chứng minh tương tự, ta có: tứ giác DQK’E nội tiếp.

Do đó K’ là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp $\Delta\mathbf{DQM}, \Delta\mathbf{DPN} \Rightarrow \mathbf{K'} \equiv \mathbf{K}$

$\Rightarrow$ D, A, K thẳng hàng. (3)

Ta có:

$$\mathbf{BKE} = \mathbf{EAB} = \mathbf{CAF} = \mathbf{CKF} \Rightarrow \mathbf{BKC} = \mathbf{180^0} - \mathbf{2.BKE} = \mathbf{2}\left(\mathbf{90^0} - \mathbf{EAB}\right) = \mathbf{2BAC} = \mathbf{BIC}$$

$\Rightarrow$ Tứ giác BKIC nội tiếp.

Mà tứ giác IBPC nội tiếp. Nên PB = PC $\Rightarrow \mathbf{BKP} = \mathbf{CKP}$ $\Rightarrow$ KP là tia phân giác của $\mathbf{BKC}$

Mặt khác: $\mathbf{BKA} = \mathbf{180^0} - \mathbf{AEB} = \mathbf{180^0} - \mathbf{AFC} = \mathbf{AKC}$

$\Rightarrow$ Tia đối của tia KA cũng là phân giác của $\mathbf{BKC}$ $\Rightarrow$ A, K, P thẳng hàng. (4)

Từ (3) và (4) suy ra 4 điểm D, A, K, P thẳng hàng.

Bài 5: (1 điểm) Với mỗi số nguyên dương m lớn hơn 1, kí hiệu s(m) là ước nguyên dương lớn nhất của m và khác m. Cho số tự nhiên n > 1, đặt $\mathbf{n_0} = \mathbf{n}$ và lần lượt tính các số $\mathbf{n_1} = \mathbf{n_0} - \mathbf{s}\left(\mathbf{n_0}\right), \mathbf{n_2} = \mathbf{n_1} - \mathbf{s}\left(\mathbf{n_1}\right), \ldots, \mathbf{n_{i+1}} = \mathbf{n_i} - \mathbf{s}\left(\mathbf{n_i}\right), \ldots,$ Chứng minh tồn tại số nguyên dương k để $\mathbf{n_k} = 1$ và tính k khi $\mathbf{n} = 2^{16}.14^{17}$

Ta có: $\mathbf{s}\left(\mathbf{n_i}\right) < \mathbf{n_i}$, suy ra $\mathbf{n_i} - \mathbf{s}\left(\mathbf{n_i}\right) \geq 0$. Suy ra $\mathbf{n_{i+1}} \geq 1$. Do đó $\mathbf{n_i} \geq 1$ với mọi i=1,2,…

Mặt khác $\mathbf{n_{i+1}} = \mathbf{n_i} - \mathbf{s}\left(\mathbf{n_i}\right) < \mathbf{n_i}$ với mọi i. Suy ra $\mathbf{n} = \mathbf{n_0} > \mathbf{n_1} > \mathbf{n_2} > \ldots. > \ldots.$

Nếu không tồn tại $\mathbf{n_k}$ để $\mathbf{n_k} = 1$ ta xây dựng được dãy vô hạn các số nguyên dương giảm và nhỏ hơn n (vô lí) vì các số nhỏ hơn n là bằng n – 1.

Vậy tồn tại k sao cho $\mathbf{n_k} = 1$.

Với $\mathbf{n} = 2^{16}.14^{17} = 2^{33}.7^{17}$, ta có $\mathbf{n_1} = 2^{33}.7^{17} - 2^{32}.7^{17} = 2^{32}.7^{17}$; $\mathbf{n_2} = 2^{31}.7^{17}$

HẾT